УДК 372.851

К ВОПРОСУ О ФОРМИРОВАНИИ ЛОГИЧЕСКИХ УМЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ

Сергеева И.Е., кандидат педагогических наук,
Московский педагогический государственный университет, г. Москва
ie.sergeeva@mpgu.edu

Аннотация. В данной статье рассмотрен один из способов формирования логических умений у учащихся при обучении школьному курсу математики. Указано, какие логико-языковые умения необходимо формировать у школьников. Рассмотрены примеры логико-языковых ошибок.

Ключевые слова. Логико-языковые умения, логико-ориентированные задачи, школьный курс математики, Вводный курс математики в педвузе.

ON THE QUESTION OF FORMING THE LOGICAL SKILLS OF SCHOOLBOYS

I.E. Sergeeva, candidate of pedagogical sciences,
Moscow state pedagogical university, Moscow
ie.sergeeva@mpgu.edu

Abstract. In this article is considered one of method of forming logical skills in studying the school course of mathematics. It is indicated, what logical-language skills must be formed for schoolchildren. The examples of logical-language errors are considered.

Keywords: logical-language skills, logical-oriented tasks, school course of mathematics, Introductory course of mathematics at pedagogical university.

Изучение школьного курса математики для многих современных школьников представляет собой трудное, а иногда просто непосильное занятие (независимо от ступени обучения). На этом пути школьники допускают значительное количество ошибок, многие из которых вызваны непониманием, а нередко, просто незнанием материала логического характера, отсутствием опыта логико-ориентированной деятельности с математическим материалом. Приведем примеры таких логико-языковых ошибок.

1. Считают верным предложение «Если функция не является возрастающей, то она является убывающей» (неверно преобразовано отрицание определяющего условия определения).

2. Обратным к предложению «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» считают предложение «Углы при основании треугольника равны, если этот треугольник равнобедренный» (неверно построено обратное предложение).

3. Считают формулировкой определения четного числа следующее: «Целое число n называется четным, если $n = 2k$, где $k \in \mathbf{Z}$» (неверная формулировка определения).

Как и чем помочь школьникам в преодолении таких ошибок? К сожалению, курса, при изучении которого целенаправленно формировались бы логические умения, в школе в настоящее время нет, а ведь его изучение могло бы не только облегчить учащимся изучение самой математики, но и помочь учащимся осознать, как они рассуждают, помочь научиться рассуждать правильно, не делать логических ошибок. Согласно ФГОС ООО, в курс математики введен раздел «Логика», который не предполагает дополнительных часов на изучение и материал которого встраивается в различные темы курсов математики и информатики и предваряется ознакомлением с элементами теории множеств [5, с. 343]. Приведем содержание этого раздела [там же].

Множества и отношения между ними. Множество, *характеристическое свойство множества,* элемент множества, *пустое, конечное, бесконечное множество*. Подмножество. Отношение принадлежности, включения, равенства. Элементы множества, способы задания множеств, *распознавание подмножеств и элементов подмножеств с использованием кругов Эйлера*.

Операции над множествами. Пересечение и объединение множеств. *Разность множеств, дополнение множества. Интерпретация операций над множествами с помощью кругов Эйлера*.

Элементы логики. Определение. Утверждения. Аксиомы и теоремы. Доказательство. Доказательство от противного. Теорема, обратная данной. Пример и контрпример.

Высказывания. Истинность и ложность высказывания. *Сложные и простые высказывания. Операции над высказываниями с использованием логических связок: и, или, не. Условные высказывания (импликации)*.

Раздел «Логика», как отмечено выше, не предполагает дополнительных часов на его изучение. Значит, надо по мере необходимости и при любом удобном случае встраивать элементы его содержания в содержание школьного курса математики. Однако остается не вполне ясным, как именно встраивать элементы логики в школьный курс математики и когда это делать. В данной статье попытаемся дать ответ на этот вопрос.

Отметим, что в некоторых школьных учебниках по математике (например, [1], [2], [3]) материал логического характера присутствует явно. В основном рассматриваются следующие вопросы: высказывания и высказывательные формы (предложения с переменными), следование и равносильность, употребление логических связок. Однако такие вопросы, как кванторные слова, отрицание предложений (особенно с кванторными словами), обратное предложение, необходимое условие, достаточное условие и некоторые другие вопросы логического характера остаются или для дополнительного изучения, или вообще не рассматриваются авторами учебников. Считаем, что рассмотрению этих вопросов должно быть уделено значительное внимание при обучении математике в школе.

Принято считать, что необходимые логические знания и умения формируются у учащихся по ходу изучения математики, однако это далеко не так. Даже студенты первого курса математического факультета МПГУ демонстрируют незнание и непонимание материала логического характера, что значительно затрудняет нормальное изучение высшей математики.

Приведем примеры задач из стартовой диагностической работы (которую мы предлагаем студентам в рамках Вводного курса математики или в рамках адаптационного модуля) и процент студентов, справившихся с каждой из задач.

1. (25%) Известно: неверно, что некоторые студенты данной группы решили все задачи. Выберите предложение, которое равносильно данному предложению:

- Некоторые студенты данной группы не решили ни одной задачи.
- Некоторые студенты данной группы не решили хотя бы одну задачу.
- Каждый студент данной группы не решил ни одной задачи.
- Каждый студент данной группы не решил хотя бы одну задачу.

2. (29%) Из следующих вариантов выберите тот, который является определением *скрещивающихся прямых*:

- Две прямые в пространстве являются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях.
- Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях.
- Две прямые в пространстве являются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
- Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

3. (17%) Запишите предложение, обратное теореме «Диагонали *любого* ромба взаимно перпендикулярны», не опуская слово «любой».

В МПГУ на математическом факультете на первом курсе изучается Вводный курс математики [6], в рамках которого происходит целенаправленная логическая адаптация студентов к изучению высшей математики, язык которой отличается от языка школьной математики богатством (но и сложностью) логических конструкций. Однако не во всех учебных планах этот курс присутствует явно, в некоторых потоках логическое введение в математику изучается в рамках адаптационного модуля по математике. Это обучение осуществляется преподавателями кафедры математического анализа, являющимися авторами логико-ориентированного Вводного курса математики [6].

В данной статье остановимся на том, какие именно логико-языковые умения нужно формировать у школьников при обучении математике и как это можно сделать. Считаем, что у школьников к концу обучения в средней общеобразовательной школе должны быть сформированы следующие универсальные логико-языковые умения, необходимые им для успешного изучения как школьной, так и высшей математики [7]:

1) умение логически грамотно конструировать математические выражения и предложения;

2) умение строить предложение, равносильное данному (в том числе, преобразовывать отрицание предложения);

3) умение строить для данного предложения обратное, противоположное, контрапозитивное ему предложения;

4) умение перейти от одной формы теоремы к другой;

5) умение логически грамотно формулировать определения знакомых математических понятий.

Полагаем, что на базовом уровне эти умения можно сформировать у школьников при обучении математике, соблюдая следующие *рекомендации*:

- встраивать материал логического характера в изучаемый математический материал;
- не пропускать у учащихся ошибки логического характера, акцентировать на них внимание и исправлять их;
- задавать учащимся вопросы, ответы на которые требуют осознанного владения материалом логического характера;
- при каждом возможном случае просить учащихся аргументировать свой ответ.

Раскроем, к примеру, первую рекомендацию. Встраивание материала логического характера в изучаемый математический материал предполагает:

- устраивать логические минутки, посвященные материалу логического характера;
- материал логического характера вводить там, где это уместно и целесообразно;
- «посмотреть» на математический материал с логической стороны;
- материал логического характера вводить на примерах, кратко приводя теоретический материал;
- формировать логические умения поэтапно.

Как можно реализовать эти рекомендации?

Прежде всего, следует не упускать удобные моменты для разговора о логическом материале.

1. Так, при изучении теорем (для лучшего понимания их формулировок) рекомендуется вместе с учащимися переходить от безусловной формы теоремы (если она дана в такой форме) к условной, явно выделяя посылку и заключение теоремы. Кроме того, при изучении теорем предлагать учащимся формулировать обратное предложение. Именно здесь и удобно поговорить с учащимися о том, что такое обратное предложение, как его построить (хотя бы в простейших случаях). Ведь затруднения учащихся при работе с обратными предложениями вызваны, прежде всего, тем, что они просто не знают, что такое обратное предложение, как его построить. После того, как построено обратное предложение, естественно задать вопрос, а верно ли оно? Для обоснования отрицательного ответа необходимо привести контрпример. А здесь уместно рассказать учащимся об отрицании предложений, о том, как преобразовать отрицание предложений в условной форме (особенно, с кванторными словами). Также при изучении теорем и обратных предложений целесообразно, на наш взгляд, провести важный разговор о необходимых и достаточных условиях.

2. При изучении математических определений, помимо примеров объектов, удовлетворяющих определяющему условию определения, необходимо (для лучшего усвоения определения) предлагать учащимся для распознавания и примеры объектов, этому условию не удовлетворяющих. Еще один удобный момент для разговора об отрицании предложений (определяющего условия определения).

3. При решении систем и совокупностей уравнений / неравенств уместно поговорить с учащимися о конъюнкции и дизъюнкции предложений. Сами решения рекомендуем оформлять в виде цепочки равносильных предложений (удобный момент поговорить об отношении равносильности и следования).

4. При доказательстве теорем уместно и весьма полезно обращать внимание учащихся на используемые логические методы доказательства: от противного, разбором случаев и др. Все это приведет к более осознанному овладению учащимися математическим материалом, позволит отойти от столь традиционного, к сожалению, «заучивания» доказательств теорем.

Конечно же, этот список «удобных моментов» можно при желании продолжить.

Кроме того, для успешного формирования логико-языковых умений необходимо, по нашему мнению, помимо традиционных задач, присутствующих в школьных учебниках математики, предлагать учащимся специальные логико-ориентированные задачи. *Логико-ориентированными* задачами мы называем задачи, которые акцентируют внимание на логической составляющей математического материала и направлены на формирование логических знаний и умений учащихся, позволяющих повысить эффективность усвоения этого материала [8]. Например, можно предложить такую задачу:

Задача 1. Восстановите пропущенные слова в формулировке определения возрастающей функции:

«Функцию f … возрастающей на множестве, если для … двух значений ее аргумента x_1 и x_2 из этого множества, … $x_1 > x_2$, … $f(x_1) > f(x_2)$».

Приведем ожидаемый ответ. «Функцию f <u>называют</u> возрастающей на множестве, если для <u>любых</u> двух значений ее аргумента x_1 и x_2 из этого множества, <u>если</u> $x_1 > x_2$, <u>то</u> $f(x_1) > f(x_2)$».

При выполнении подобных задач у учащихся будет формироваться умение логически грамотно формулировать определения знакомых математических понятий. Кроме того, такая задача позволит учащимся научиться выявлять логическую структуру определения.

В учебном пособии [6] представлены, в том числе, логико-ориентированные задачи, которые можно предложить школьникам при обучении математике.

Отметим, что некоторые задачи школьного курса математики можно переформулировать, добавить логический акцент и получить логико-ориентированную задачу. Приведем примеры.

Задача 2а (задача из учебника [4, с. 88]). Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных сверху;

б) возрастающих и не ограниченных сверху.

Задача 2б (логико-ориентированная задача). Выясните, верны ли следующие высказывания. Ответ обоснуйте.

а) всякая возрастающая последовательность не ограничена сверху;

б) всякая возрастающая последовательность ограничена сверху.

На примере задачи 2б мы продемонстрировали, как можно установить более прочные связи между изучаемыми математическими понятиями; предложить учащимся аргументировать свой ответ. Правда, возможно, кто-то подумает, что мы тем самым усложнили задачу, во-первых, сделали ее исследовательской (требуется выяснить, а не привести пример), во-вторых, поставили учащихся в ситуацию необходимости привести контрпример для обоснования отрицательного ответа, т.е. поставили учащихся перед необходимостью преобразовать отрицание предложения. Считаем, что вторая формулировка задачи будет полезнее для учащихся: кроме знания примеров таких последовательностей у учащихся расширятся знания свойств последовательностей, а также сформируются соответствующие логические умения.

Задача 3а (задача из учебника [3, с. 101]). Выясните, сколько корней имеет уравнение:

в) $3x - 21 = 16 + 3x$; г) $5(x+9) = 5x + 45$; е) $x^2 + x - 5 = 0$.

Задача 3б (логико-ориентированная задача). Для каждой высказывательной формы укажите ее множество истинности и, если оно является конечным, укажите число его элементов:

в) $3x - 21 = 16 + 3x$; г) $5(x+9) = 5x + 45$; е) $x^2 + x - 5 = 0$.

На примере задачи 3а мы продемонстрировали, как можно «посмотреть» на математический материал с логической стороны; разумеется, мы не призываем делать это в каждой такой задаче. Однако учащиеся должны понимать, что уравнение – частный случай высказывательной формы (предложения с переменными), что имеются тождественно истинные высказывательные формы, тождественно ложные высказывательные формы (множество истинности – пустое), что корень уравнения – это элемент множества всех таких значений переменной, которые обращают данное равенство с переменной в верное числовое равенство.

Итак, при изучении школьного курса математики открываются широкие возможности для формирования у школьников универсальных логико-языковых умений, для формирования у них опыта логико-ориентированной деятельности с математическими теоремами и определениями. Сформированность этих умений у школьников будет способствовать более сознательному усвоению математического материала и повышению уровня логической грамотности в целом. Невнимание же учителей математики к материалу логического характера, на наш взгляд, существенно снижает ценность математической подготовки школьников (в ее логическом плане) и делает ее весьма затруднительной.

Литература

1. Башмаков М.И. Алгебра. 8 класс. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 256 с.

2. Дорофеев Г.В. Математика. 6 кл. Ч. 1, 2, 3. / Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 112 с.

3. Козлов В.В. Математика: алгебра и геометрия. 7 класс / Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др. – М.: ООО «Русское слово», 2013. – 384 с.

4. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2000. – 315 с.

5. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mosmetod.ru/files/dokumenty/primernaja-osnovnaja-obrazovatelnaja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf.

6. Тимофеева И.Л. Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 240 с.

7. Тимофеева И.Л. Об универсальных логико-языковых умениях студентов – будущих учителей математики / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «68 Герценовские чтения» / Под ред. В.В. Орлова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2015. – С. 19-20.

8. Тимофеева И.Л. Комплекс логико-ориентированных задач как средство формирования логической грамотности будущих учителей математики / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 1. – С. 69-72.